ΤΡΙΤΗ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΜΟΡΦΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ: $III_p : T_pS \to \mathbb{R}$, $III_p(\vec{w}) = \langle L_p\vec{w}, L_p\vec{w}\rangle = \|L_p\vec{w}\|^2$

ή ισοδύναμα $III_p(\vec{w}) = \langle L_p^2\vec{w}, \vec{w}\rangle$, με $L_p^2 = L_p \circ L_p$

ή ισοδύναμα $III_p(\vec{w}) = \langle dN_p(\vec{w}), dN_p(\vec{w})\rangle$, $N : S \to S^2$ gauss

ΘΕΩΡΗΜΑ

Για κάθε $p \in S$, ισχύει:

$$III_p - 2H(p)\, II_p + K(p)\, I_p = 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω τυχόν $p \in S$ και επιλέγουμε ένα τμήμα της S έστω αυτό $X(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ να περιέχει το p. και τέτοιο ώστε οι διευθύνσεις των u,v-παραμετρικών καμπυλών στο p να είναι κύριες διευθύνσεις. Τότε, από Θ. Rodrigues στο p:

$N_u = -k_1 \vec{X}_u$ και $N_v = -k_2 \vec{X}_v$, k_1, k_2 κύριες καμπυλότητες

Έστω $\vec{w} \in T_pS \Rightarrow \vec{w} = \alpha \cdot \vec{X}_u + \beta \vec{X}_v$

$\langle N, N\rangle = 1 \Rightarrow \langle dN_p, N\rangle = 0 \Leftrightarrow dN_p \perp N \Leftrightarrow dN_p \parallel \vec{w}$

Τότε, $dN_p = N_u a + N_v \beta = -k_1 \vec{X}_u a - k_2 \vec{X}_v \beta =$

$= -k_1 \vec{X}_u a - k_1 \vec{X}_v \beta + k_1 \vec{X}_v \beta - k_2 \vec{X}_v \beta =$

$= -k_1 (a\vec{X}_u + \beta \vec{X}_v) + (k_1 - k_2) \vec{X}_v \beta =$

$= -k_1 \vec{w} + (k_1 - k_2) \vec{X}_v \beta \Rightarrow \boxed{dN + k_1 \vec{w} = (k_1 - k_2) \vec{X}_v \beta}$

Διαφορετικά, το dN γράφεται:

$dN_p = -k_1 \vec{X}_u a + k_2 \vec{X}_u a - k_2 \vec{X}_u a - k_2 \vec{X}_v \beta =$

$= (k_2 - k_1) \vec{X}_u a - k_2 (a\vec{X}_u + \beta \vec{X}_v) =$

$= -k_2 \vec{w} + (k_2 - k_1) \vec{X}_u a \Rightarrow \boxed{dN_p + k_2 \vec{w} = (k_2 - k_1) \vec{X}_u \alpha}$

Πολλ/ζουμε κατά μέλη:

$(dN + k_1\vec{w})(dN + k_2\vec{w}) = -(k_1 - k_2)^2 \alpha \cdot \beta \cdot \cancel{\langle \vec{X}_u, \vec{X}_v\rangle} \to 0$ (αφού οι γραμμές καμπυλότητας είναι ορθογώνιες στο p)

$\Rightarrow (dN + k_1\vec{w})(dN + k_2\vec{w}) = 0 \Rightarrow \langle dN_p, dN_p\rangle + (k_1 + k_2)\langle dN_p, \vec{w}\rangle + k_1 \cdot k_2 \|\vec{w}\|^2 = 0$

$\Rightarrow III_p - 2H(p)\, II_p + K(p)\, I_p = 0$